MATHÉMATIQUES II

Options M, P

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure affine euclidienne habituelle, et il est rapporté au repère orthonormé direct : $(0, e_1, \ldots e_n)$. L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est alors rapporté à la base orthonormée directe $(e_i)_{i=1..n}$. Si X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $(e_i)_{i=1..n}$, on identifiera le vecteur X et la matrice colonne :

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{vmatrix} .$$

On notera $\langle X|Y\rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs X et Y, et $\| X \|$ la norme du vecteur X : $\| X \|^2 = \langle X|X\rangle$.

Φ désigne une forme quadratique définie positive de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$;

A est sa matrice dans la base $(e_i)_{i=1..n}$. On rappelle que dans ce cas, pour tout X de $\mathbb{R}^n$, $\Phi(X) = {}^t X A X$.

B désigne enfin un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et F est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(X) = \Phi(X) - 2\langle B|X\rangle$.

On notera R la solution éventuelle du système linéaire : $A . X = B$.

Les vecteurs X et Y seront dits conjugués par rapport à Φ si $\langle AX|Y\rangle = 0$.

$X_0, X_1, \ldots, X_p$ désignant p vecteurs, Vect $(X_0, X_1, \ldots, X_p)$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Les résultats numériques demandés seront donnés sous forme de fractions rationnelles irréductibles.

Les trois parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

PARTIE 1

Dans cette partie 1, n est un entier valant 2 ou 3.

1 - *a*) Montrer que : $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX|Y\rangle = \langle X|AY\rangle$.

b) Justifier l'existence de R.

c) Trouver deux réels λ et μ strictement positifs, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, tels que :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}^n,\ \lambda . \| X \|^2 \leq \langle AX|X\rangle \leq \mu . \| X \|^2 .$$

d) Si $X \neq 0$, montrer que l'ensemble des vecteurs conjugués de X par rapport à Φ forment un sous-espace de $\mathbb{R}^n$; préciser sa dimension.

2 - Calculer le gradient $G(X)$ de la fonction F au point X
Montrer que $G(X)$ s'écrit matriciellement : $G(X) = 2(AX - B)$

3 - *a*) X et H désignant deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer que :

$$F(X+H) = F(X) + \langle G(X) | H \rangle + \Phi(H) .$$

b) En déduire que la fonction F présente un minimum unique pour $X = R$.

4 - *a*) X désignant un vecteur fixe de $\mathbb{R}^n$, avec $X \neq R$, trouver $\rho \in \mathbb{R}$ de sorte que $F(X - \rho . G(X))$ soit minimal et calculer ce minimum.

b) ρ étant ainsi déterminé, si $Y = X - \rho . G(X)$, montrer que $\langle G(X) | G(Y) \rangle = 0$.

5 - X_0 désignant un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on définit la suite (X_k) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par :

$$X_{k+1} = X_k - \rho_k G(X_k) \text{ avec } \rho_k = \frac{\| G(X_k) \|^2}{2 \Phi(G(X_k))} \text{ , si } X_k \neq R \text{ et } \rho_k = 0 \text{ si } X_k = R .$$

a) Que peut-on dire des suites $(F(X_k))$; $(F(X_{k+1}) - F(X_k))$?

b) Montrer que la suite $(G(X_k))$ converge vers le vecteur nul.
On pourra utiliser l'une des inégalités du 1 - *c*) .

c) En déduire la limite de la suite (X_k) .

6 - Soit, pour $n = 2$, la fonction F définie par : $F(x, y) = 2x^2 + y^2$, et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer X_1 , X_2 , X_k .

PARTIE 2

On considère dans cette partie 2 l'ellipsoïde (E) de $\mathbb{R}^3$ d'équation $F(X) = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

1 - *a*) Soit M_0 un point de (E) , et le vecteur $X_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Donner un vecteur normal en M_0 à (E) . On l'écrira en fonction de A , B et X_0 .

b) Écrire un système linéaire ayant pour solutions les coordonnées du centre de l'ellipsoïde (E) (c'est le point où le gradient de F est nul) .

2 - *a*) On définit les vecteurs $R_0 = A \,.\, X_0 - B$, et $X_1 = X_0 - \alpha_0 R_0$. Si $R_0 \neq 0$, trouver le réel α_0 tel que $F(X_1)$ soit minimal.

b) On pose $R_1 = A \,.\, X_1 - B$ et $D_1 = R_1 + \beta_0 R_0$. Calculer $\langle R_0 | R_1 \rangle$. Si $R_1 \neq 0$, trouver le réel β_0 tel que D_1 et R_0 soient conjugués par rapport à Φ.

3 - *a*) On définit le vecteur $X_2 = X_1 - \alpha_1 D_1$. Trouver le réel α_1 tel que $F(X_2)$ soit minimal.

b) On définit le vecteur $R_2 = A \,.\, X_2 - B$. Calculer $\langle R_0 | R_2 \rangle$ et $\langle R_1 | R_2 \rangle$.

4 - *a*) On pose $D_2 = R_2 + \beta_1 D_1$. Si $R_2 \neq 0$, trouver le réel β_1 tel que D_2 et D_1 soient conjugués par rapport à Φ. Calculer $\langle AD_2 | R_0 \rangle$.

b) On pose $X_3 = X_2 - \alpha_2 D_2$. Trouver le réel α_2 tel que $F(X_3)$ soit minimal.

Démontrer que $X_3 = R$. Que peut-on dire si l'un des vecteurs R_0 , R_1 ou R_2 est nul ?

5 - *a*) Si (E) a pour équation $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz - 2z = 0$, vérifier que (E) est bien un ellipsoïde.

Préciser son centre et un vecteur normal à (E) au point O .

b) Calculer R_0 , X_1 , R_1 , D_1 , X_2 , R_2 , D_2 , si $X_0 = 0$ et vérifier le résultat précédent.

PARTIE 3

Dans ce paragraphe, n est un entier quelconque strictement positif. On construit trois suites (finies ou non) de vecteurs (X_k) , (R_k) et (D_k) par les formules de récurrence suivantes :

$$X_0 \text{ est donné ; } R_0 = D_0 = A \,.\, X_0 - B \,.$$

Tant que les expressions ont un sens, on définit : $\alpha_k = \dfrac{\langle R_k | D_k \rangle}{\langle AD_k | D_k \rangle}$; $X_{k+1} = X_k - \alpha_k \,.\, D_k$; $R_{k+1} = A \,.\, X_{k+1} - B$; $\beta_k = \dfrac{\langle R_{k+1} | R_{k+1} \rangle}{\langle R_k | R_k \rangle}$; $D_{k+1} = R_{k+1} + \beta_k \,.\, D_k$.

1 - Si $R_0 \neq 0$, calculer $\langle R_0 | R_1 \rangle$ et $\langle AD_1 | D_0 \rangle$.

2 - On suppose que les vecteurs R_0 , R_1 , ... , R_k sont non nuls et deux à deux orthogonaux.

a) Montrer que la famille $(D_0, D_1, ..., D_k)$ est libre et que :

$$\forall\ i \in [1..k]\ ,\ \text{Vect}\,(D_0, D_1, ..., D_i) = \text{Vect}\,(R_0, R_1, ..., R_i)\ .$$

b) Montrer que : $\forall\ i, j \in [1..k]\ ,\ j > i \Rightarrow \langle D_i | R_j \rangle = 0\ .$

c) Montrer que : $\forall\ i, j \in [1..k]\ ,\ i \neq j \Rightarrow \langle AD_i | D_j \rangle = 0\ .$

d) Montrer que R_{k+1} existe et que : $\forall\ i \in [1..k]\ ,\ \langle R_i | R_{k+1} \rangle = 0\ .$

3 - *a*) Montrer que les suites ainsi définies sont finies, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $R_{k+1} = 0$ et $R_k \neq 0$.

b) Que vaut alors X_{k+1} ?

4 - Écrire la procédure en langage Pascal, d'en tête :

GradientConjugué (*A* : Matrice ; *B* : Vecteur ; **var** Sol : Vecteur) ;

qui retourne dans Sol la solution de l'équation $A\ .\ X = B$ calculée selon cette méthode. Les itérations seront commencées avec $X_0 = 0$, le critère d'arrêt étant : n itérations ou $\| R_k \| <$ epsilon .

On supposera prédéfinies les constantes n et epsilon , ainsi que les types :

Matrice = **Array** [1 . . *n*, 1 . . *n*] **of real** et Vecteur = **Array** [1 . . *n*] **of real.**

On utilisera les procédures prédéfinies :

- MultMatVect (*A* : Matrice ; *V* : Vecteur ; **var** Res : Vecteur) ; qui rend : Res = $A\ .\ V$,
- MultScalVect (*V* : Vecteur ; *x* : **real** ; **var** Res : Vecteur) ; qui rend : Res = $x\ .\ V$,
- AddVect (*U*,*V* : Vecteur ; **var** Res : Vecteur) ; qui rend : Res = $U + V$,

et la fonction ProdScal (*U*,*V* : Vecteur) : **Real** ; qui rend : $\langle U | V \rangle$.